УДК 512.542

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП ЗАДАННЫХ ИНДЕКСОВ В ГРУППАХ С ОПЕРАТОРАМИ

Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, М.В. Селькин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ON INTERSECTION OF MAXIMAL SUBGROUPS OF THE SET INDEXES IN GROUPS WITH OPERATORS

R.V. Borodich, E.N. Borodich, M.V. Selkin

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

В работе изучаются свойства пересечений максимальных подгрупп в группах с операторами.

***Ключевые слова**: максимальная подгруппа, формация, $\mathfrak{F}$-корадикал, группа операторов.*

In the paper the properties of intersection of maximal subgroups in groups with the operators are studied.

***Keywords**: maximal subgroup, formation, $\mathfrak{F}$-residual, group of operators.*

Введение

Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. Авторы придерживаются терминологии, введенной в монографиях [1], [2]. В теории групп объекты, экстремально расположенные в группе, всегда привлекали исследователей. К таким объектам, в первую очередь, относятся максимальные подгруппы. Свойства этих подгрупп, их пересечения оказывают существенное влияние на строение самой группы. Основополагающее влияние здесь сыграли исследования Г. Фраттини, О.Ю. Шмидта, Н. Ито, Б. Хуперта, К. Дерка, Р. Картера, Б. Фишера, Т. Хоукса, Д. Томпсона, В. Гашюца, Л.А. Шеметкова и др. Осознание общности различных конкретных результатов привело к возникновению теории формаций (В. Гашюц, Р. Картер, Т. Хоукс, Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба, М.В. Селькин, Х. Бетчел, М. Хофман, Д. Бейдлеман, А. Болистер-Болиншес, В.В. Шлык и др.). В последующем к формационному исследованию конечных групп был применен функторный метод, что позволило получить новое направление (Д. Барнс, О. Кегель, Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба, М.В. Селькин, С.Ф. Каморников и др.). А.Н. Скибой была предложена идея рассматривать максимальные подгруппы среди подгрупп, принадлежащих определенной формации [3]. В последние годы авторами данной статьи проводятся исследования свойств максимальных подгрупп и их пересечений в конечных группах с операторами, являющиеся дальнейшим развитием указанных выше направлений.

1 Определения и обозначения

Класс групп называют нормально наследственным (S_n-замкнутым), если вместе с каждой своей группой G он содержит все нормальные подгруппы группы G.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$;

2) если $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Формацию $\mathfrak{F}$ называют локальной, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G – пересечение всех нормальных подгрупп N группы, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$.

Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$-нормальной ($\mathfrak{F}$-абнормальной), если $G^{\mathfrak{F}}$ содержится (не содержится) в M.

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (пересечение всех подгрупп из G, сопряженных с подгруппой M).

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f : A \mapsto End(G)$, где $End(G)$ – гомоморфное отображение группы G в себя или эндоморфизм группы G. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Обозначим через $\Phi(G, A)$ пересечение ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп.

Если таких подгрупп в группе G нет, то положим $\Phi(G,A)=G$.

Заметим, что максимальная A-допустимая подгруппа M либо целиком содержит $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, либо $MG^{\mathfrak{F}}=G$. Действительно. Так как произведение A-допустимых подгрупп A-допустимо и $G^{\mathfrak{F}}$ – характеристическая подгруппа, а, следовательно, A-допустимая, то $MG^{\mathfrak{F}}=M$ или $MG^{\mathfrak{F}}=G$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация и группа G имеет группу операторов A. Через $D^{\mathfrak{F}}(G,A)$ обозначим пересечение ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал группы G. Если в группе G все максимальные A-допустимые подгруппы содержат $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, то положим $D^{\mathfrak{F}}(G,A)=G$.

В случае, когда $\mathfrak{F}$ совпадает с формацией всех нильпотентных групп, подгруппу $D^{\mathfrak{F}}(G,A)$ будем обозначать $D^{\mathfrak{N}}(G,A)$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация и группа G имеет группу операторов A, π – множество простых чисел. Через $D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)$ обозначим пересечение ядер всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, индексы которых не делятся на простые числа из π.

Обозначим далее через $\overline{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)$ пересечение ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал, не принадлежащих формации $\mathfrak{F}$, индекс каждой из которых не делится на простые числа из π.

В случае отсутствия в группе G указанных максимальных A-допустимых подгрупп полагаем эти пересечения равными самой группе G.

Отметим, если $A=1$, то подгруппы $D^{\mathfrak{F}}(G,A)$, $D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)$ и $\overline{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)$ совпадают соответственно с подгруппами $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$, $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$ и $\overline{\Delta}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$, строение которых рассматривалось в работах многих авторов [1], [2].

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A-допустимой относительно некоторой группы операторов A, а также не всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе. Примеры приведены в работе [4].

2 Вспомогательные результаты

***Лемма* 2.1** [1, с. 179]. *Если подгруппа H пронормальна в G, то подгруппа $N_G(H)$ абнормальна в G.*

***Теорема* 2.2** [5, с. 52]. *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|)=1$ и подгруппа $\Phi_{\pi}(G,A)$ обладает свойством C_{π}. Тогда*

$$\Phi_{\pi}(G,A)/O_{\pi}(G)=\Phi(G/O_{\pi}(G),A).$$

***Теорема* 2.3** [4, с. 58]. *Пусть группа G имеет группу операторов A, $\mathfrak{F}$ – ступенчатая формация. Тогда*

$$D^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi(G,A)=Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G/\Phi(G,A)).$$

***Лемма* 2.4.** *Пусть K – нормальная подгруппа группы G, обладающая свойством C_{π} и H – холлова подгруппа из K. Тогда $N_G(H)$ – абнормальная подгруппа группы G.*

Доказательство. Заметим, что для любого $x\in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $<H,H^x>\subseteq K$, то есть H является пронормальной подгруппой в G. Тогда по лемме 2.1. подгруппа $N_G(H)$ является абнормальной в G. Лемма доказана.

Из теоремы Силова следует, что любая подгруппа группы G обладает свойством C_p. Отсюда и из предыдущей леммы получаем, что в любой нормальной подгруппе нормализатор A-допустимой силовской подгруппы является абнормальной подгруппой группы G.

***Лемма* 2.5.** *Пусть группа G имеет группу операторов A. Тогда $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)\subseteq D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)$.*

Доказательство. Предположим, что $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)\not\subseteq D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)$. Тогда существует максимальная A-допустимая подгруппа M, не содержащая $G^{\mathfrak{F}}$, индекс которой не делится на числа из π, такая, что $M\not\supseteq\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$. Так как $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$ является характеристической подгруппой, то $M\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)=G$. Так как M – максимальная A-допустимая подгруппа, не содержащая $G^{\mathfrak{F}}$, индекс которой не делится на числа из π, то она содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе K группы G, индекс которой не делится на числа из π. Тогда получаем, что

$$G=M\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)=K\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)=K.$$

Полученное противоречие и доказывает лемму.

***Лемма* 2.6.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда если N – нормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N\subseteq\overline{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)$, то*

$$\overline{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G/N,A)=\overline{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)/N.$$

Доказательство. Если $N\subseteq\overline{D}^{\mathfrak{F}}(G,A)$, то $N\subseteq M$, где M – максимальная A-допустимая подгруппа группы G, не принадлежащая $\mathfrak{F}$ и не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал. Тогда

$$\overline{D}^{\mathfrak{F}}(G/N, A) = \cap(M/N)_{G/N}, \qquad (2.1)$$

где M/N пробегает множество максимальных A-допустимых подгрупп из G/N, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал, не принадлежащих $\mathfrak{F}$.

Продолжим равенство (2.1):

$$\cap(M/N)_{G/N} = (\cap M_G)/N = \overline{D}^{\mathfrak{F}}(G, A)/N. \quad (2.2)$$

Из равенств (2.1) и (2.2) вытекает справедливость утверждения. Лемма доказана.

***Лемма* 2.7.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда если N – нормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N \subseteq D_\pi^{\mathfrak{F}}(G, A)$, то*

$$D_\pi^{\mathfrak{F}}(G/N, A) = D_\pi^{\mathfrak{F}}(G, A)/N.$$

Доказательство. Если $N \subseteq D_\pi^{\mathfrak{F}}(G, A)$, то $N \subseteq M$, где M – любая слабо $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа из G с индексом, не делящимся на простые числа из π. Тогда

$$D_\pi^{\mathfrak{F}}(G/N, A) = \cap(M/N)_{G/N}, \qquad (2.3)$$

где M/N пробегает множество всех слабо $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальных A-допустимых подгрупп из G/N с индексом, не делящимся на простые числа из π.

Продолжая равенство (2.3), получаем

$$\cap(M/N)_{G/N} = (\cap M_G)/N = D_\pi^{\mathfrak{F}}(G, A)/N. \quad (2.4)$$

Из равенств (2.3) и (2.4) вытекает справедливость утверждения.

3 О влиянии индексов макисмальных подгрупп

***Теорема* 3.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|)=1$. Если в группе G подгруппа $\Phi_\pi(G, A)$ обладает свойством C_π, то*

$$D_\pi^{\mathfrak{F}}(G, A)/O_\pi(G) = D^{\mathfrak{F}}(G/O_\pi(G), A).$$

Доказательство. Пусть $O_\pi(G) \neq 1$. По теореме 2.2

$$\Phi_\pi(G, A)/O_\pi(G) = \Phi(G/O_\pi(G), A).$$

Тогда теорема для факторгруппы $G/O_\pi(G)$ теорема верна по индукции. Следовательно,

$$D_\pi^{\mathfrak{F}}(G/O_\pi(G), A)/O_\pi(G/O_\pi(G)) =$$
$$= D^{\mathfrak{F}}(G/O_\pi(G)/O_\pi(G/O_\pi(G)), A).$$

Так как $O_\pi(G/O_\pi(G)) = 1$ и

$$D_\pi^{\mathfrak{F}}(G/O_\pi(G), A) = D_\pi^{\mathfrak{F}}(G, A)/O_\pi(G),$$

то $D_\pi^{\mathfrak{F}}(G, A)/O_\pi(G) = D^{\mathfrak{F}}(G/O_\pi(G), A)$.

Пусть теперь $O_\pi(G) = 1$. Тогда по теореме 2.2 $\Phi_\pi(G, A)/O_\pi(G) = \Phi(G/O_\pi(G), A)$. Значит,

$$D_\pi^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_\pi(G, A) = \Phi(G, A).$$

Пусть K/N – главный фактор группы G, причём,

$$\Phi(G, A) \subseteq N \subseteq K \subseteq D_\pi^{\mathfrak{F}}(G, A).$$

Так как

$$K \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq D_\pi^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(G, A),$$

то $N = N(K \cap G^{\mathfrak{F}}) = K \cap NG^{\mathfrak{F}}$.

Поэтому имеет место следующий изоморфизм:

$$KG^{\mathfrak{F}}/NG^{\mathfrak{F}} \simeq K/K \cap NG^{\mathfrak{F}} =$$
$$= K/N(K \cap G^{\mathfrak{F}}) = K/N.$$

Но $G/NG^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Поэтому главный фактор $KG^{\mathfrak{F}}/NG^{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-центральным в G. Следовательно, главный фактор K/N также является $\mathfrak{F}$-центральным в G. Таким образом, $D_\pi^{\mathfrak{F}}(G, A)/\Phi(G, A)$ – $\mathfrak{F}$-гиперцентральная нормальная подгруппа группы $G/\Phi(G, A)$. Поэтому

$$D_\pi^{\mathfrak{F}}(G, A)/\Phi(G, A) \subseteq Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G/\Phi(G, A)).$$

С другой стороны, на основании теоремы 2.3 имеем, что

$$D_\pi^{\mathfrak{F}}(G, A)/\Phi(G, A) \supseteq D^{\mathfrak{F}}(G, A)/\Phi(G, A) =$$
$$= Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G/\Phi(G, A)).$$

Значит,

$$D_\pi^{\mathfrak{F}}(G, A)/\Phi(G, A) = Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G/\Phi(G, A)).$$

Следовательно,

$$D_\pi^{\mathfrak{F}}(G, A)/\Phi(G, A) = D^{\mathfrak{F}}(G, A)/\Phi(G, A).$$

Следовательно, $D_\pi^{\mathfrak{F}}(G, A) = D^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Теорема доказана.

Из теоремы 3.1 получаем следующее

***Следствие* 3.1.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|)=1$, $\mathfrak{F}$ – локальная нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, а подгруппа $\Phi(G, A)$ обладает свойством C_π, тогда $D_\pi^{\mathfrak{F}}(G, A)/O_\pi(G) \in \mathfrak{F}$.*

В случае, когда $\mathfrak{F}$ – формация всех нильпотентных групп, то из теоремы 3.1 получаем следующее

***Следствие* 3.2.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|)=1$. Если подгруппа $\Phi(G, A)$ обладает свойством C_π, то $D_\pi^{\mathfrak{N}}(G, A)/O_\pi(G) \in \mathfrak{N}$.*

Пусть $\pi = \{p\}$, где p – простое число, $D_p^{\mathfrak{F}}(G, A)$ – пересечение ядер всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп группы G, индексы которых не делятся на данное простое число p.

Ввиду теоремы Силова и теоремы 3.1 справедливы следующие утверждения.

***Следствие* 3.3.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|)=1$. Тогда*

$$D_p^{\mathfrak{F}}(G, A)/O_p(G) = D^{\mathfrak{F}}(G/O_p(G), A).$$

***Следствие* 3.4.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|)=1$, $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Тогда $D_p^{\mathfrak{F}}(G,A)/O_p(G)\in\mathfrak{F}$.*

***Следствие* 3.5.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|)=1$. Тогда $D_p^{\mathfrak{N}}(G,A)/O_p(G)\in\mathfrak{N}$.*

***Теорема* 3.2.** *Пусть π и τ – множества простых чисел, таких, что $\pi\cap\tau=\varnothing$. Тогда для любой формации $\mathfrak{F}$ и любой группы G с группой операторов A, такой, что $(|G|,|A|)=1$, справедливо равенство,*

$$D_\pi^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap D_\tau^{\mathfrak{F}}(G,A)=D^{\mathfrak{F}}(G,A).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$D^{\mathfrak{F}}(G,A)\subseteq D_\pi^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap D_\tau^{\mathfrak{F}}(G,A).$$

Пусть $D^{\mathfrak{F}}(G,A)\subset K=D_\pi^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap D_\tau^{\mathfrak{F}}(G,A)$. Тогда в G найдётся $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа M, такая, что $G=MK$. Если $|G:M|$ не делится на числа из $\omega=\pi\cup\tau$, то $D_\omega^{\mathfrak{F}}(G,A)\subseteq M$. Следовательно, $KM=M$, что невозможно. Значит, индекс M в G делится одновременно на простые числа из π и τ.

Пусть $O_\pi(G)=1$. Тогда ввиду теоремы 3.1 имеем равенство $D_\pi^{\mathfrak{F}}(G,A)=D^{\mathfrak{F}}(G,A)$. Поэтому $K\subseteq M$, что противоречит определению подгруппы K. Значит, $O_\pi(G)\neq 1$. Если $O_\pi(G)M=G$, то $|G:M|$ делится на числа из π. Противоречие. Поэтому $O_\pi(G)\subseteq M$. На основании теоремы 3.1 имеем

$$D_\pi^{\mathfrak{F}}(G,A)/O_\pi(G)=$$
$$=D^{\mathfrak{F}}(G/O_\pi(G),A)\subseteq M/O_\pi(G).$$

Отсюда следует, что $D_\pi^{\mathfrak{F}}(G,A)\subseteq M$. Снова пришли к противоречию. Таким образом, остаётся заключить, что

$$D_\pi^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap D_\tau^{\mathfrak{F}}(G,A)=D^{\mathfrak{F}}(G,A).$$

Теорема доказана.

***Следствие* 3.6.** *Пусть π и τ – множества простых чисел, таких, что $\pi\cap\tau=\varnothing$. Тогда для любой формации $\mathfrak{F}$ и любой группы G с группой операторов A, такой, что $(|G|,|A|)=1$,*

$$D_\pi^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap D_\tau^{\mathfrak{F}}(G,A)\in\mathfrak{F}.$$

***Следствие* 3.7.** *Пусть p и q – различные простые числа. Тогда для любой формации $\mathfrak{F}$ и любой группы G с группой операторов A, такой, что $(|G|,|A|)=1$, справедливо равенство:*

$$D_p^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap D_q^{\mathfrak{F}}(G,A)=D^{\mathfrak{F}}(G,A).$$

***Следствие* 3.8.** *Пусть p и q – различные простые числа. Если $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|)=1$, тогда*

$$D_p^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap D_q^{\mathfrak{F}}(G,A)\in\mathfrak{F}.$$

***Теорема* 3.3.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|)=1$, и $\bar{D}_\pi^{\mathfrak{F}}(G,A)\neq G$. Если в группе G подгруппа $\Phi_\pi(G,A)$ обладает свойством C_π, то*

$$\bar{D}_\pi^{\mathfrak{F}}(G,A)/O_\pi(G)=D^{\mathfrak{F}}(G/O_\pi(G),A).$$

Доказательство. Вначале покажем, что

$$K=\bar{D}_\pi^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap G^{\mathfrak{F}}\subseteq\Phi_\pi(G,A).$$

Пусть $K\nsubseteq\Phi_\pi(G,A)$. Тогда в G найдётся такая максимальная A-допустимая подгруппа M, индекс которой не делится на простое число из π, что $G=KM$. Понятно, что M не содержит $G^{\mathfrak{F}}$. Если $M\notin\mathfrak{F}$, то $K\subseteq\bar{D}_\pi^{\mathfrak{F}}(G,A)\subseteq M$, что невозможно. Следовательно, $M\in\mathfrak{F}$. Отсюда

$$G/K=MK/KM/M\cap K\in\mathfrak{F}.$$

Поэтому $G^{\mathfrak{F}}\subseteq K\subseteq\bar{D}_\pi^{\mathfrak{F}}(G,A)$. А это противоречит существованию в группе G максимальной A-допустимой подгруппы, не содержащей $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, индекс которой не делится на простые числа из π. Итак, $K\subseteq\Phi_\pi(G,A)$.

Пусть $O_\pi(G)\neq 1$. Тогда ввиду того, что

$$\Phi_\pi(G,A)/O_\pi=\Phi(G/O_\pi(G),A),$$

получаем справедливость теоремы для группы $G/O_\pi(G)$ по индукции. Следовательно,

$$\bar{D}_\pi^{\mathfrak{F}}(G/O_\pi(G),A)/O_\pi(G/O_\pi(G))=$$
$$=D^{\mathfrak{F}}(G/O_\pi(G)/O_\pi(G/O_\pi(G)),A).$$

Так как $O_\pi(G/O_\pi(G))=1$ и

$$\bar{D}_\pi^{\mathfrak{F}}(G/O_\pi(G),A)=\bar{D}_\pi^{\mathfrak{F}}(G,A)/O_\pi(G),$$

то

$$\bar{D}_\pi^{\mathfrak{F}}(G,A)/O_\pi(G)=D^{\mathfrak{F}}(G/O_\pi(G),A).$$

Пусть теперь $O_\pi(G)=1$. Тогда

$$\bar{D}_\pi^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap G^{\mathfrak{F}}\subseteq\Phi_\pi(G,A)=\Phi(G,A).$$

Пусть K/N – главный фактор группы G, причём,

$$\Phi(G,A)\subseteq N\subseteq K\subseteq\bar{D}_\pi^{\mathfrak{F}}(G,A).$$

Так как

$$K\cap G^{\mathfrak{F}}\subseteq\bar{D}_\pi^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap G^{\mathfrak{F}}\subseteq\Phi(G,A),$$

то

$$N=N(K\cap G^{\mathfrak{F}})=K\cap NG^{\mathfrak{F}}.$$

Поэтому имеет место следующий изоморфизм:

$$KG^{\mathfrak{F}}/NG^{\mathfrak{F}}\simeq K/K\cap NG^{\mathfrak{F}}=$$
$$=K/N(K\cap G^{\mathfrak{F}})=K/N.$$

Так как $G/NG^{\mathfrak{F}}\in\mathfrak{F}$, то главный фактор $KG^{\mathfrak{F}}/NG^{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-центральным в G. Следовательно, главный фактор K/N также является

$\mathfrak{F}$-центральным в G. Таким образом, $\overline{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi(G,A)$ – $\mathfrak{F}$-гиперцентральная нормальная подгруппа группы $G/\Phi(G,A)$. Поэтому

$$\overline{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi(G,A) \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G/\Phi(G,A)).$$

С другой стороны, на основании теоремы 2.3 имеем, что

$$\overline{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi(G,A) \supseteq D^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi(G,A) = = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G/\Phi(G,A)).$$

Значит,

$$\overline{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi(G,A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G/\Phi(G,A)).$$

Следовательно,

$$D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi(G,A) = D^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi(G,A),$$

то есть $D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A) = D^{\mathfrak{F}}(G,A)$. Теорема доказана.

Следствие 3.9. *Пусть группа G имеет группу операторов A, $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, и $\overline{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A) \neq G$. Если подгруппа $\Phi(G,A)$ обладает свойством C_{π}, то $\overline{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)/O_{\pi}(G) \in \mathfrak{F}$.*

Так как в любой группе G подгруппа $\Phi_p(G,A)$ обладает свойством C_p, то при $\pi = \{p\}$ получаем следующий результат.

***Следствие* 3.10.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|)=1$, $\overline{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A) \neq G$. Тогда*

$$\overline{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)/O_p(G) = D^{\mathfrak{F}}(G/O_p(G),A).$$

***Следствие* 3.11.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|)=1$, $\overline{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A) \neq G$. Если $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, то $\overline{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)/O_p(G) \in \mathfrak{F}$.*

В случае, когда группа операторов единична, то из теорем 3.1, 3.2 и 3.3 получаем соответствующие результаты из работы [2].

Заключение

В данной работе описаны свойства подгруппы, равной пересечению максимальных A-допустимых подгрупп, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал, индексы которых не делятся на простые числа из π.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков – М. : Наука, 1978. – 267 с.

2. *Селькин*, *М.В.* Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Мн. : Беларуская навука, 1997. – 144 с.

3. *Скиба*, *А.Н.* О пересечении всех максимальных $\mathfrak{F}$-подгрупп конечной группы / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3 (4). – С. 56–62.

4. *Бородич*, *Р.В.* О пересечении подгрупп в группах с операторами / Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, М.В. Селькин // Вестник БГУ. Серия 1. – 2012. – С. 54–62.

5. *Бородич*, *Р.В.* О влиянии индексов максимальных подгрупп на их пересечения / Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, М.В. Селькин // Вестник Брестского университета. Серия 4. – 2011. – № 2.– С. 49–56

Поступила в редакцию 20.11.13.